náš příklad z toho plyne, že kořeny m_1 a m_2 nemusíme hledat, absolutní člen kvadratické rovnice pro m je přímo součinem kořenů $m_1 \cdot m_2$.

1. $m_1 \cdot m_2 = 5$

2. $m_1 \cdot m_2 = -21$

3. $m_1 \cdot m_2 = -30$

Exponenciální nerovnice 2

1.

Exponenciální funkce dosahuje pouze kladných hodnot, pro každé reálné x platí $a^x > 0$.

$P = (-\infty, \infty)$

2.

Exponenciální funkce dosahuje pouze kladných hodnot, pro každé reálné x platí $a^x > 0$.

$P = (-\infty, \infty)$

3.

Exponenciální funkce dosahuje pouze kladných hodnot, pro každé reálné x platí $a^x > 0$.

$P = \varnothing$

Exponenciální nerovnice 3

1.

$$\frac{1}{9} < \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-4|} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^2 < \left(\frac{1}{3}\right)^{|x-4|} < \left(\frac{1}{3}\right)^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2 > |x-4| > 0$$

Pozor, otáčí se nerovnosti, základ je menší než 1.

Vzdálenost od bodu 4 na číselné ose musí být větší než 0 a menší než 2.

$x \in (2,4) \cup (4,6)$

2.

$$\frac{1}{64} < \left(\frac{1}{4}\right)^{|x-1|} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^3 < \left(\frac{1}{4}\right)^{|x-1|} < \left(\frac{1}{4}\right)^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3 > |x-1| > 0$$

Pozor, otáčí se nerovnosti, základ je menší než 1.

Vzdálenost od bodu 1 na číselné ose musí být větší než 0 a menší než 3.

$x \in (-2,1) \cup (1,4)$

3.

$$\frac{1}{5} < \left(\frac{1}{5}\right)^{|x+7|} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^1 < \left(\frac{1}{5}\right)^{|x+7|} < \left(\frac{1}{5}\right)^0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1 > |x+7| > 0$$

Pozor, otáčí se nerovnosti, základ je menší než 1.

Vzdálenost od bodu -7 na číselné ose musí být větší než 0 a menší než 1.

$x \in (-8,-7) \cup (-7,-6)$

Směrnice přímky

1.

Směrnici přímky lze snadno (a téměř bez práce) vypočítat ze vztahu $k = \frac{u_2}{u_1}$, kde u_1 a u_1 jsou souřadnice směrového vektoru dané přímky. Považuji však za jistější (než si pamatovat takto výlučný vzorec) používat postup:

a) přímku zapíšu obecnou rovnicí (jestli tak není přímo zadána)

b) z obecné rovnice vyjádřím y

c) koeficient u lineárního členu („číslo před x") je směrnice

1. metoda (výpočtem)

směrový vektor přímky: $\vec{u} = (3,-5)$

normálový vektor přímky: $\vec{n} = (5,3)$

obecná rovnice přímky:

$p: 5x + 3y + c = 0$

$A[-2,5] \in p \Rightarrow p: 5x + 3y - 5 = 0$

směrnicový tvar rovnice přímky:

$3y = -5x + 5 \qquad y = -\frac{5}{3}x + \frac{5}{3}$

směrnice: $k = -\frac{5}{3}$

Poznámka: jelikož nám jde jen o směrnici, nemusíme absolutní člen c dopočítávat a uvádět ho pouze obecně (písmenem)

2. metoda (vzorcem)

směrový vektor přímky: $\vec{u} = (3,-5)$

směrnice: $k = \frac{u_2}{u_1} = -\frac{5}{3}$

2.

1. metoda (výpočtem)

směrový vektor přímky: $\vec{u} = (9,-1)$

normálový vektor přímky: $\vec{n} = (1,9)$

obecná rovnice přímky:

$p: x + 9y + c = 0$

$A[-7,1] \in p \Rightarrow p: x + 9y - 2 = 0$

směrnicový tvar rovnice přímky:

$9y = -x + 2 \qquad y = -\frac{1}{9}x + \frac{2}{9}$

směrnice: $k = -\frac{1}{9}$

2. metoda (vzorcem)

směrový vektor přímky: $\vec{u} = (9,-1)$

směrnice: $k = \frac{u_2}{u_1} = -\frac{1}{9}$

3.

obecná rovnice přímky: $p: 5x - 7y + 3 = 0$

směrnicový tvar rovnice přímky:

$7y = 5x + 3 \qquad y = \frac{5}{7}x + \frac{3}{7}$

směrnice: $k = \frac{5}{7}$

2. metoda (vzorcem)

normálový vektor přímky: $\vec{n} = (5,-7)$

směrový vektor přímky: $\vec{u} = (7,5)$

směrnice: $k = \frac{u_2}{u_1} = \frac{5}{7}$

Test – zadání

(1) Každý příklad pečlivě vyřešte, řešení neodhadujte

(2) Z uvedených odpovědí je právě jedna správně.

(3) Příklady 1–10 jsou hodnocené 5 body, příklady 11–15 jsou hodnocené 10 body.

1. Číslo $\log_9 27$ je rovno číslu: a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{3}{2}$, c) $\frac{3}{4}$, d) $\frac{4}{3}$, e) jiný výsledek.

2. Maximálním definičním oborem reálné funkce $f(x) = \sqrt{1 - \log_8 x}$ jedné reálné proměnné je množina: a) $\langle 1,8)$, b) $\langle 1,8\rangle$, c) $(0,8\rangle$, d) $(0,8)$, e) jiný výsledek.

3. Počet všech kořenů rovnice $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$ v intervalu $\langle 0,\pi)$ je roven číslu: a) 1, b) 2, c) 3, d) 4, e) jiný výsledek.

4. Zlomek $\frac{\sqrt{\sqrt[3]{10}}.\sqrt{10}}{\sqrt[3]{10^2}}$ je roven číslu: a) $\sqrt{10}$, b) $\sqrt[3]{10}$ c) $\sqrt[6]{10}$ d) 1, e) jiný výsledek.

5. Absolutní hodnota (resp. velikost) komplexního čísla z = (1 – 3i)(2 + 2i) je reálné číslo, které je prvkem intervalu:

a) $\langle 0,4)$, b) $\langle 4,9)$, c) $\langle 9,12)$, d) $\langle 12,16)$, e) jiný výsledek.

6. Číslo $\left[\sin\frac{13\pi}{3} - \cos\frac{25\pi}{6}\right]$ je rovno číslu:

a) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$, b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, c) $\frac{1}{2}$, d) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$, e) jiný výsledek.

7. Výraz $\log_9\sqrt{9} - \log_9\sqrt[4]{9^3} + \log_9\sqrt[4]{9^5}$ je roven číslu: a) 0, b) 1, c) –1, d) $\frac{1}{2}$, e) jiný výsledek

8. Všechna reálná řešení rovnice $8^{x+1} + 8^x = 9$ náleží intervalu:

a) $\langle -4,-2)$, b) $\langle -2,0)$, c) $\langle 0,2)$, d) $\langle 2,4)$, e) jiný výsledek

9. Všechna reálná řešení rovnice $\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} = 64$ náleží intervalu: a) (–4, –2), b) $\langle -2,0)$, c) $\langle 0,2)$, d) $(2,4)$, e) jiný výsledek

10. V aritmetické posloupnosti je dán n-tý člen $a_n = \frac{3+5n}{2}$. Člen a_{n+1} je:

a) $a_{n+1} = \frac{8+5n}{2}$, b) $a_{n+1} = \frac{7+5n}{2}$, c) $a_{n+1} = \frac{6+5n}{2}$, d) $a_{n+1} = \frac{5+5n}{2}$, e) jiný výsledek

11. Počet všech reálných řešení goniometrické rovnice $2\cos^2 x = \cos x$ v intervalu $\left\langle \frac{\pi}{3}, 2\pi \right\rangle$ je roven číslu:

a) 4, b) 3, c) 2, d) 1, e) jiný výsledek

12. Všechna reálná řešení rovnice $8^{\frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{2}} = \frac{1}{64}$ náleží intervalu: a) (0,2), b) $\langle 2,3)$, c) $\langle 3,4)$, d) $\langle 4,5)$, e)jiný výsledek

13. Uvažujme reálnou funkci f jedné reálné proměnné definovanou předpisem $f(x) = x^2 - 3x$. Množina všech reálných čísel a, pro která platí $f(a-1) < f(a) + 7$ je rovna množině: a) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right)$, b) $\left(-\frac{3}{2}, \infty\right)$, c) $\left(\frac{3}{2}, \infty\right)$, d) $\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$, e) jiný výsledek

14. Goniometrický(resp. polární) tvar komplexního čísla $z = \frac{5-2i}{7+3i}$ lze napsat takto:

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

b) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

c) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

d) $z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, e) jiný výsledek

15. Uvažujme exponenciální funkci $f(x) = \left(\frac{2-m}{3-m}\right)^x$, kde x je reálná proměnná a m je reálný parametr. Množina všech hodnot parametru m, pro které je uvedená exponenciální rovnice rostoucí, je rovna množině:

a) $(3,\infty)$, b) $(-\infty,3)$, c) $(-\infty,2) \cup (3,\infty)$, d) $(-\infty,2)$, e) jiný výsledek

Test – řešení

1.

$\log_9 27 = v \quad \Leftrightarrow \quad 9^v = 27$

$3^{2v} = 3^3 \Rightarrow v = \frac{3}{2}$

Za b) je správně

2. Definiční obor:

a) $1 - \log_8 x \geq 0$, $\log_8 x \leq 1$, $x \leq 8$

b) $x > 0$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{D(f) = (0,8\rangle}$$

Za c) je správně

3.

$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2} \doteq 1{,}\ldots$

Hodnota fce sinus nemůže být vyšší než 1. Rovnice nemá řešení.

Za e) je správně

4.

$$\frac{\sqrt{\sqrt[3]{10}}.\sqrt{10}}{\sqrt[3]{10^2}} = \frac{10^{\frac{1}{6}}.10^{\frac{1}{2}}}{10^{\frac{2}{3}}} = 10^{\frac{1+3-4}{6}} = 10^0 = 1$$

Za d) je správně

5.

$z = (1-3i)(2+2i) = 2 + 2i - 6i - 6i^2 = 8 - 4i$

$|z| = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \doteq 8{,}94$

$|z| \in \langle 4,9)$

Za b) je správně

6.

$$\left[\sin\frac{13\pi}{3} - \cos\frac{25\pi}{6}\right] = \sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

Za e) je správně

7.

$$\log_9\sqrt{9} - \log_9\sqrt[4]{9^3} + \log_9\sqrt[4]{9^5} = \log_9\frac{9^{\frac{1}{2}}.9^{\frac{5}{4}}}{9^{\frac{3}{4}}} =$$

$$= \log_9 9^{\frac{2+5-3}{4}} = \log_9 9 = 1$$

Za b) je správně

8.

$8.8^x + 8^x = 9$

$9.8^x = 9$

$8^x = 1 = 8^0$

$x = 0$

Za c) je správně

9.

$\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1} = 8^{1-x} \Rightarrow 8^{1-x} = 8^2$

$1 - x = 2$

$x = -1$

Za b) je správně

10.

$$a_n = \frac{3+5n}{2}; a_{n+1} = \frac{3+5(n+1)}{2} = \frac{8+5n}{2}$$

Za a) je správně

11.

$2\cos^2 = \cos x$

$2\cos^2 x - \cos x = 0$

$\cos x(2\cos - 1) = 0$

a)

$\cos x = 0$

$x_{1k} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

b)

$\cos x = \frac{1}{2}$

$x_{2k} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$

$x_{3k} = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in Z$

Kořeny na intervalu $\left\langle \frac{\pi}{3}, 2\pi \right\rangle: \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{3}\pi$

Za a) je správně

12.

$8^{\frac{\log_{\frac{1}{2}} x}{2}} = 8^{-2} \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} x = -2 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$

$\Rightarrow x = 4$

Za d) je správně

13.

$f(a) = a^2 - 3a$

$f(a-1) = (a-1)^2 - 3(a-1) =$

$= a^2 - 2a + 1 - 3a + 3 = a^2 - 5a + 4$

$f(a-1) < f(a) + 7$

$a^2 - 5a + 4 < a^2 - 3a + 7$

$2a > -3$

$a > -\frac{3}{2}$

$a \in \left(-\frac{3}{2}; \infty\right)$

Za b) je správně

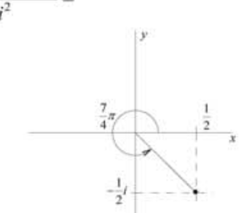
14.

$$z = \frac{5-2i}{7+3i} \cdot \frac{7-3i}{7-3i} = \frac{35 - 15i - 14i + 6i^2}{49 - 9i^2} =$$

$$= \frac{29 - 29i}{58} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$|z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$z = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7}{4}\pi + i\sin\frac{7}{4}\pi\right)$$



Za d) je správně

15.

Funkce f : $y = a^x$ je rostoucí pro $a > 1$

$\Rightarrow \frac{2-m}{3-m} > 1 \quad /-1$

$\frac{2-m}{3-m} - 1 > 0$

$\frac{-1}{3-m} > 0 \quad \rightarrow$ čitatel záporný

$\Rightarrow 3 - m < 0,\ m > 3,\ m \in (3;\infty)$

Za a) je správně