MATURITA – MATEMATIKA

Vítám vás v druhém dílu průvodce k maturitní zkoušce z matematiky. Dnes projdeme goniometrické rovnice. Pokud budete mít zájem o rozsáhlejší materiál k maturitní zkoušce, zavítejte na naše internetové stránky: www.maturujeme.cz

Základní rady:

1. Každou otázku si zpracuj tak, abys pokryl příklady celé téma.
2. Současně si ke každé kapitole připrav soupis toho nejdůležitějšího, jakési záchytné háčky, na které u samotné zkoušky navěsíš vše další.
3. Vzorečky si rozděl na ty, které musíš umět a ty, které najdeš v tabulkách.
4. Pomáhej si obrázky, náčrtky, schématy.
5. Žádný příklad nevzdávej, každá úloha má své řešení .

Kontrolní písemná práce – rovnice

Řeš rovnice pro neznámé z množiny R:

1. $6^{v+2}+3.6^{v}=1404$

2. $\sqrt{2^{x-3}}=4^2$

3. $\log_3(x+5)=\log_3(2x-1)$

4. $(\log_3 x)^2-\log_3 x^3+2=0$

5. $u^{1+\log u}=100$

6. $(\operatorname{tg} x+1)^2=2\operatorname{tg} x+2$

7. $2\sin^2 x+7\cos x-5=0$

8. $\sin^2 x+\sin^2 2x=1$

9. $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}<2.\binom{9}{7}$

10. $(n+2)!\left[\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{9}{(n+2)!}\right]\le 0$

Řešení

1.

$6^{v+2}+3.6^{v}=1404$

$6^{v}.6^2+3.6^{v}=1404$

$6^{v}.\cancel{(36+3)}=6^2.\cancel{39}$

$\underline{\underline{v=2}}$

2.

$\sqrt{2^{x-3}}=4^2 \quad /^2$

$2^{x-3}=2^8$

$x-3=8$

$\underline{\underline{x=11}}$

3.

$\log_3(x+5)=\log_3(2x-1)$

$x+5=2x-1$

$\underline{\underline{x=6}}$

zkouška:

$l=\log_3 11$

$p=\log_3 11 \qquad \underline{l=p}$

4.

$(\log_3 x)^2-\log_3 x^3+2=0$

$u^2-3u+2=0$

$u_{1,2}=\frac{3\pm1}{2}=\begin{cases}2 \Rightarrow \underline{\underline{x=9}}\\ 1 \Rightarrow \underline{\underline{x=3}}\end{cases}$

5.

$u^{1+\log u}=100$

$\log u^{1+\log u}=\log 100$

$(1+\log u)\log u=2$

$y^2+y-2=0$

$y_{1,2}=\begin{cases}-2 \Rightarrow u_1=0{,}01\\ 1 \Rightarrow u_2=10\end{cases}$

6.

$(\operatorname{tg} x+1)^2=2\operatorname{tg} x+2$

$\operatorname{tg}^2 x+2\operatorname{tg} x+1=2\operatorname{tg} x+2$

$\operatorname{tg}^2 x=1$

$\left.\begin{array}{l}\text{a) } x_1=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ \text{b) } x_2=\frac{3}{4}\pi+k\pi\end{array}\right\}\underline{\underline{x=\frac{\pi}{4}+k\cdot\frac{\pi}{2}}}$

$k\in Z$

7.

$2\sin^2 x+7\cos x-5=0$

$2(1-\cos^2 x)+7\cos x-5=0$

$2-2\cos^2 x+7\cos x-5=0$

$2y^2-7y+3=0$

$y_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{25}}{4}=\begin{cases}3\\ \frac{1}{2}\end{cases}$

$\cos x=\frac{1}{2}\Rightarrow \underline{\underline{x_1=\frac{\pi}{3}+2k\pi}}$

$\underline{\underline{x_2=\frac{5}{3}\pi+2k\pi}}\ ;\ k\in Z$

8.

$\sin^2 x+\sin^2 2x=1$

$\sin^2 x+4\sin^2 x\cos^2 x=\sin^2 x+\cos^2 x$

$\cos^2 x(4\sin^2 x-1)=0$

a) $\cos x=0 \qquad \underline{\underline{x_1=\frac{\pi}{2}+k\pi}}$

b) $4\sin^2 x=1$

$\sin^2 x=\frac{1}{4}$

$\sin x=\pm\frac{1}{2}$

$\underline{\underline{x_{2,1}=\frac{\pi}{6}+2k\pi}} \qquad \underline{\underline{x_{2,2}=\frac{5}{6}\pi+2k\pi}}$

$\underline{\underline{x_{3,1}=\frac{7}{6}\pi+2k\pi}} \qquad \underline{\underline{x_{3,2}=\frac{11}{6}\pi+2k\pi}}$

9.

$\frac{(n-1)!}{(n-3)!}<2.\binom{9}{7}$

$(n-1)(n-2)<2\cdot\frac{9.8}{2}$

$n^2-3n+2<9.8$

$n^2-3n-70<0$

$n_{1,2}=\frac{3\pm17}{2}=\begin{cases}10\\ -7\end{cases}$

$\underline{\underline{n=\left\{\begin{array}{l}\text{nelze}\\ \cancel{0,1,2},3,4,5,6,7,8,9\end{array}\right\}}}$

10.

$(n+2)!\left[\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{9}{(n+2)!}\right]\le 0$

$(n+2)(n+1)+(n+2)-9\le 0$

$n^2+3n+2+n+2-9\le 0$

$n^2+4n-5\le 0$

$n_{1,2}=\frac{-4\pm6}{2}=\begin{cases}1\\ -5\end{cases}$

$\underline{\underline{n\in\{0;1\}}}$

Hodnocení: Každý příklad je za 10 bodů.

0 – 40 bodů:	nic moc
40 – 60 bodů:	ujde to
60 – 80 bodů:	výtečně
80 – 100 bodů:	můžeš jít maturovat hned

Goniometrické rovnice základní typy

Řeš v R rovnice:

1. $10\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=5$

2. $2\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=3$

3. $\sqrt{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{6}$

4. $\sqrt{12}\operatorname{cotg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-2$

5. $\sqrt{\pi}\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)=\pi$

6. $\left(\sin\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2=1$

7. $\sin^3 x-\sin x=0$

Řešení

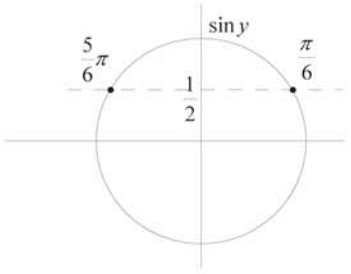
1.

$10\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=5 \qquad /:10$

$\sin y=\frac{1}{2}$

$y_{1k}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$y_{2k}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi$



a) $y_{1k}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow\frac{x_{1k}}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow x_{1k}=\frac{\pi}{3}+k\pi$

b) $y_{2k}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow\frac{x_{2k}}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow x_{2k}=\frac{2\pi}{3}+k\pi$

$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{3}+k\pi;\frac{2\pi}{3}+k\pi\right\}$

Vydělením a zavedením substituce převedeme rovnici na základní typ. K takovému tvaru se snažíme dopracovat při řešení každé goniometrické rovnice.

Rovnice typu:

$\sin x=a, \cos x=b, \operatorname{tg} x=c, \operatorname{cotg} x=d$

řešíme několika možnými způsoby:

a) graficky pomocí jednotkové kružnice
b) prostřednictvím grafu funkce
c) využitím tabulky hodnot
d) z hlavy (máme-li tuto pasáž matematiky dobře nacvičenu)
e) pomocí kalkulačky

Nezapomeň připočítat periodu ihned při počítání s náhradní proměnnou. Perioda se v dalším výpočtu násobením nebo dělením pozmění.

Při práci s jednotkovou kružnicí je funkce sinus zobrazena na ose y. Perioda je 2π.

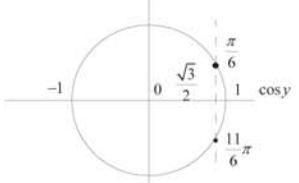
2.

$2\sqrt{3}\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=3$

$\cos y=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_{1k}=\frac{\pi}{6}+2k\pi$

$y_{2k}=\frac{11\pi}{6}+2k\pi$



a) $y_{1k}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow\frac{x_{1k}}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow x_{1k}=\frac{2\pi}{3}+4k\pi$

b) $y_{2k}=\frac{11\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow\frac{x_{2k}}{2}-\frac{\pi}{6}=\frac{11\pi}{6}+2k\pi\Rightarrow x_{2k}=4\pi+4k\pi$

$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{2\pi}{3}+4k\pi;4\pi+4k\pi\right\}$

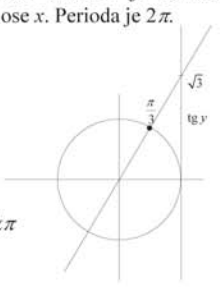
Při práci s jednotkovou kružnicí je funkce kosinus zobrazena na ose x. Perioda je 2π.

3.

$\sqrt{2}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{6}$

$\operatorname{tg} y=\sqrt{3}$

$y_k=\frac{\pi}{3}+k\pi$



$y_k=\frac{\pi}{3}+k\pi\Rightarrow\frac{x_k}{4}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+k\pi\Rightarrow x_k=\frac{8\pi}{3}+4k\pi$

$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{8\pi}{3}+4k\pi\right\}$

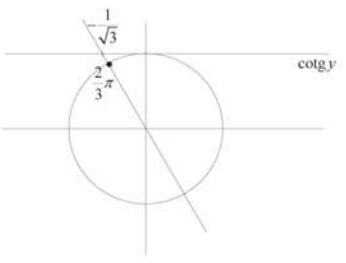
Při práci s jednotkovou kružnicí je funkce tangens zobrazena na tečně rovnoběžné s osou y. Perioda je π.

4.

$\sqrt{12}\operatorname{cotg}\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=-2$

$\operatorname{cotg} y=-\frac{1}{\sqrt{3}}$

$y_k=\frac{2\pi}{3}+k\pi$



$y_k=\frac{2\pi}{3}+k\pi\Rightarrow 3x_k+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}+k\pi\Rightarrow x_k=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$

$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right\}$

Při práci s jednotkovou kružnicí je funkce kotangens zobrazena na tečně rovnoběžné s osou x. Perioda je π.

5.

$\sin\left(\frac{2x}{3}-\frac{5\pi}{6}\right)=\sqrt{\pi}>1 \qquad K=\emptyset$

Chyták! Hodnota pravé strany po osamostatnění funkce sinus je větší než jedna a překračuje hranice oboru hodnot funkce sinus. Rovnice nemá řešení. Pozor na podobné varianty.

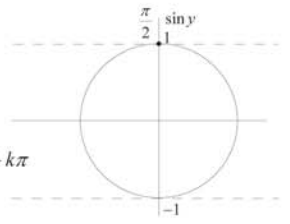
6.

$(\sin y)^2=1$

$|\sin y|=1$

$\sin y=\pm1$

$y_k=\frac{\pi}{2}+k\pi$



$y_k=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow\frac{5x_k}{2}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Rightarrow x_k=\frac{2\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}$

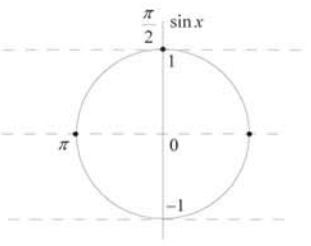
$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{\frac{2\pi}{5}+\frac{2k\pi}{5}\right\}$

7.

$\sin x(\sin^2 x-1)=0$

a) $\sin x=0\Rightarrow x_{1k}=k\pi$

b) $\sin x=\pm1\Rightarrow x_{2k}=\frac{\pi}{2}+k\pi$



$K=\bigcup_{k\in Z}\left\{k\frac{\pi}{2}\right\}$

Na začátku využijeme velmi výhodný součinový tvar rovnice s nulou na pravé straně. Buď je rovna nule přímo funkce sinus, nebo je rovna nule závorka.

Je chybou převést $\sin x$ na pravou stranu a potom zkrátit. Tím bychom ztratili kořen $\sin x=0$. Na toto nebezpečí chyby je třeba si dávat pozor u velkého množství goniometrických (a nejen goniometrických) rovnic.

Výsledkem jsou všechny průsečíky jednotkové kružnice se souřadnými osami. Takový výsledek lze zapsat velmi jednoduchou formou.

Teoretická část otázky

1. Vysvětli, jaký je rozdíl v řešení goniometrické rovnice pomocí jednotkové kružnice a pomocí grafu.

Při řešení goniometrických rovnic můžeme užít dvě základní grafické metody.

JEDNOTKOVÁ KRUŽNICE

Kružnice s poloměrem jedna. Její obvod je přesně 2π. Na ose x jsou znázorněny hodnoty funkce kosinus a na ose y hodnoty funkce sinus. Hodnoty funkcí tangens a kotangens jsou znázorněny na tečnách kružnice v bodech $[1;0]$a $[0;1]$. Body na obvodu představují v každé poloze velikost argumentu v násobcích π. Při řešení rovnice na příslušných přímkách znázorníme velikost (hodnotu) dané funkce a „najetím na jednotkovou kružnici“ odhalíme správný argument.

GRAF FUNKCE

Pro každou funkci umíme sestrojit její graf (sinusoidu, kosinusoidu, tangentoidu, kotangentoidu).

Při řešení rovnice na ose y znázorníme velikost (hodnotu) dané funkce a „najetím na graf“ odhalíme správný argument.

2. Vysvětli připisování periody k výsledku v různých případech.

Funkce sinus, kosinus, tangens a kotangens jsou funkce periodické. To znamená, že průběh funkce z určitého „základního“ intervalu se dále neměnně opakuje. Délka tohoto základního intervalu určuje velikost periody. U funkcí sinus a kosinus je perioda 2π, u funkcí tangens a kotangens je perioda π. Velikost periody násobenou celým číslem musíme připočítat k argumentu goniometrické funkce ihned, jak jej odhalíme z jednotkové kružnice nebo grafu (popřípadě za pomoci jiné negrafické metody). Velikost periody se může měnit, jestliže v rovnici vystupovala funkce s argumentem, kde se neznámá násobila nenulovým číslem.

3. Kdy nemá jednoduchá rovnice typu $\cos x=a$ žádné řešení?

Funkce sinus a kosinus mají obor hodnot $H(f)=\langle-1;1\rangle$. To znamená, že hodnoty těchto dvou funkcí nemohou být větší než číslo 1 a menší než číslo – 1. Z toho plyne, že uvažovaná rovnice (a stejný případ nastane, je-li na levé straně funkce sinus) nemá řešení pro $a\in(-\infty;-1)\cup(1;\infty)$.

4. Kdy má jednoduchá rovnice typu $\sin x=a$ jedno řešení na intervalu $\langle 0;2\pi\rangle$?

Z JEDNOTKOVÉ KRUŽNICE

Jedno řešení bude mít rovnice v případě, že kolmice na osu y (na které jsou znázorněny hodnoty funkce sinus) bude mít s jednotkovou kružnicí jen jeden společný bod. To znamená, že se jedná o dva případy: $a=1$, $a=-1$.

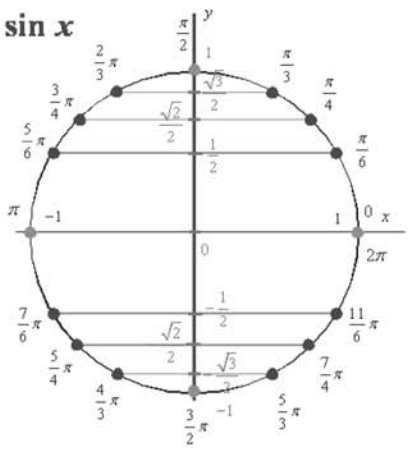
Z GRAFU FUNKCE

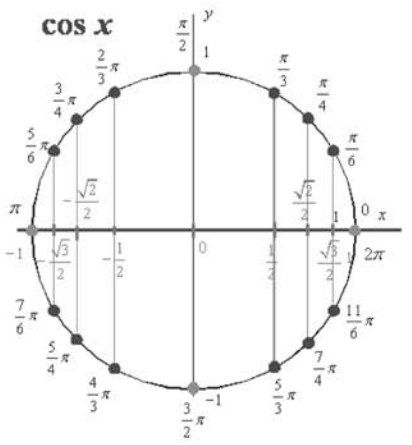
Jedno řešení bude mít rovnice tehdy, jestliže kolmice na osu y bude mít s grafem funkce na uvažovaném intervalu pouze jeden společný bod (přímka bude tečnou grafu na intervalu).

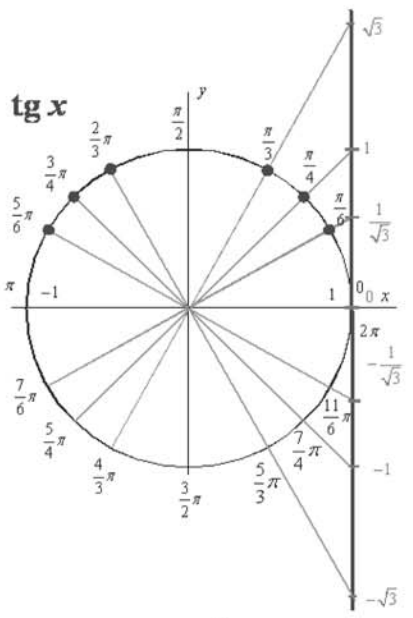
Opět zjistíme, že se jedná o dva případy: $a=1$, $a=-1$.

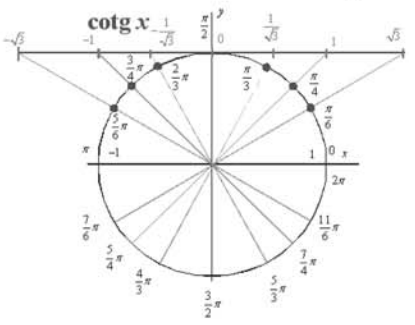
Podobně bychom pracovali v případě funkce kosinus.

Goniometrické funkce na jednotkové kružnici









Příště budeme pokračovat. Podíváme se na další maturitní otázky a témata.

Své poznámky a postřehy můžeš psát na: husar@zkousky-nanecisto.cz

© 2008 WWW.ZKOUSKY-NANECISTO.CZ Autoři dovolují tyto testy libovolně kopírovat a využívat k výuce i studijním účelům.

Testy vytvořil autorský tým www.zkousky-nanecisto.cz: Petr Husar, Petr Šedivý, Zuzana Beranová, Aleš Ryšavý a Jan Hlaváč.